Kevésbé ismert tételek alkalmazása a geometriában

Tétel (Stewart)

Legyen ABC egy háromszög és M a BC oldal egy pontja. Ekkor teljesül, hogy

$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot CM$

Bizonyítás:

Legyen az $ABC\angle = \beta$. Alkalmazzuk a cosinus tételt az *ABM*, illetve *ABC* háromszögekben (1. ábra).

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos\beta \quad / \cdot BC$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta \quad / \cdot BM$$

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot BC + BM^2 \cdot BC - 2AB \cdot BM \cdot BC \cdot \cos\beta$$
$$AC^2 \cdot BM = AB^2 \cdot BM + BC^2 \cdot BM - 2AB \cdot BC \cdot BM \cdot \cos\beta$$

Kivonva a két egyenlőséget egymásból:

$$AM^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BM = AB^2 \cdot BC - AB^2 \cdot BM + BM^2 \cdot BC - BC^2 \cdot BM$$
$$AM^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BM = AB^2 \cdot (BC - BM) - BM \cdot BC \cdot (BC - BM),$$

mivel $BC - BM = MC \Rightarrow AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BM \cdot MC \cdot BC$

Megjegyzés

1. A Stewart-tétel az alábbi alakban is kijelenthető:

   Ha M a BC szakasz egy tetszőleges pontja, akkor bármely A pont esetén

   $AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot CM$

2. A Stewart-tétel akkor is igaz, ha M a BC egyenes egy tetszőleges pontja, de ekkor az

   $AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BM \cdot MC \cdot BC$

   kifejezésben szereplő mennyiségeket irányítottnak kell tekinteni.

Alkalmazások

1. *Egy háromszög oldalai* a,b,c. *Mekkora az „* a *" oldalhoz tartozó súlyvonal?*

Alkalmazzuk a Stewart-tételt mikor az M a BC oldal F felezőpontja (2. ábra).

$$AF^2 \cdot BC = AB^2 \cdot FC + AC^2 \cdot BF - BC \cdot BF \cdot FC$$

$$s_a^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \qquad / : a$$

$$s_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow s_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \qquad (*)$$

(A háromszög másik két súlyvonalának hosszát a $(*)$ permutációjával nyerjük).

2. *Legyen* ABC *egy háromszög és* AD *a* BAC *szög belső szögfelezője* $(D \in BC)$.
Ekkor $AD^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} s(s-a)$, *ahol* $s = \frac{K}{2}$ *az* ABC *háromszög félkerülete.*

Alkalmazzuk a szögfelező tételt az ABC háromszögben (3. ábra) $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$

Mivel $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$ és $BD + DC = a$, innen egyszerű számításokkal kapjuk, hogy

$BD = \frac{ac}{b+c}$ és $DC = \frac{ab}{b+c}$.

Alkalmazzuk a Stewart-tételt, mikor $M = D$

$$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC$$

$$AD^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} + b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot a \qquad / : a$$

$$AD^2 = \frac{bc^2 + b^2 c}{b+c} - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c)^2 - a^2 bc}{(b+c)^2} = \frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{4bc}{(b+c)^2} \cdot \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} = \frac{4bc}{(b+c)^2} s(s-a)$$

azaz $AD^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} s(s-a)$

Tétel (Steiner)

Legyen ABC egy háromszög és M, N a BC oldal két pontja.
Ha $MAB\angle = NAC\angle$, akkor teljesül, hogy $\dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

Bizonyítás:

Legyen B_1, illetve B_2 a B pont merőleges vetülete AM, illetve AN egyenesekre. Legyen C_1, illetve C_2 a C pont merőleges vetülete AN, illetve AM egyenesekre (4. ábra)

Az $MBB_{1\Delta} \sim MCC_{2\Delta}$, mert $BB_1M\angle = CC_2M\angle (= 90°)$
$BMB_1\angle = CMC_2$ $(csúcsszögek)$

$$\Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{BB_1}{CC_2} \qquad (1)$$

Az $NCC_{1\Delta} \sim NBB_{2\Delta}$, mert $NC_1C\angle = BB_2N\angle (= 90°)$
$CNC_1\angle = BNB_2\angle (csúcsszögek)$

$$\Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{BB_2}{CC_1} \qquad (2)$$

Összeszorozva az (1) és (2) összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{BB_1}{CC_2} \cdot \frac{BB_2}{CC_1} \qquad (3)$$

Az $ABB_{1\Delta} \sim ACC_{1\Delta}$, mert $BB_1A\angle = CC_1A\angle (= 90°)$
$BAB_1\angle = CAC_1\angle (feltétel)$

$$\Rightarrow \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC} \qquad (4)$$

Az $ABB_{2\Delta} \sim ACC_{2\Delta}$, mert $BB_2A\angle = CC_2A\angle (= 90°)$
$BAB_2\angle = CAC_2\angle (feltétel)$

$$\Rightarrow \frac{BB_2}{CC_2} = \frac{AB}{AC} \qquad (5)$$

Felhasználva a (4) és (5) összefüggéseket, a (3) összefüggés átalakul

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{BB_1}{CC_2} \cdot \frac{BB_2}{CC_1} = \frac{BB_1 \cdot BB_2}{CC_2 \cdot CC_1} = \frac{BB_1}{CC_1} \cdot \frac{BB_2}{CC_2} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

Tehát $\dfrac{BM}{CM} \cdot \dfrac{BN}{CN} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$

Megjegyzés

1. Az ABC_{Δ} Ceva-szakaszának vagy a háromszög transzverzálisának nevezzük azt a szakaszt (egyenest), ami a háromszög egyik csúcsát, a szemközti oldal valamely pontjával köti össze.
   Következésképpen a tétel az alábbi formában is kijelenthető:

   Legyenek AM és AN az ABC_{Δ} olyan transzverzálisai, melyek egymásnak tükörképei az A-ból induló belső szögfelezőre nézve. Ekkor teljesül, hogy $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NB}{NC}=\frac{AB^2}{AC^2}$

2. Az ABC_{Δ} A-ból induló szimediánjának nevezzük azt az egyenest, amelynek az A-ból induló belső szögfelezőre való tükörképe az A-ból induló súlyvonal.

Alkalmazások

1. Legyen ABC egy háromszög és AM az A csúcsból induló szimedián. Ekkor $\frac{BM}{CM}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

   Ha AM szimedián, akkor ő az AF súlyvonal tükörképe a AD belső szögfelezőre nézve (5. ábra).

   Alkalmazzuk a Steiner-tételt, mikor AM és AF a két transzverzális

   $\frac{BM}{CM}\cdot\frac{BF}{CF}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$, de mivel AF súlyvonal $\Rightarrow BF=CF$

   Tehát $\frac{BM}{CM}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

2. Számítsuk ki a háromszög szimediánjainak hosszát, az oldalak függvényében!

   Legyenek a,b,c a háromszög oldalai, $BM=x$, $CM=a-x$ és s_a az „a” oldalhoz tartozó súlyvonal. Felhasználva az előző feladat eredményét, felírható, hogy

   $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BM}{CM}\Rightarrow\frac{c^2}{b^2}=\frac{x}{a-x}$, ahonnan egyszerű számításokkal kapjuk, hogy

   $BM=x=\frac{ac^2}{b^2+c^2}$ és $CM=a-x=\frac{ab^2}{b^2+c^2}$

Alkalmazzuk most a Stewart-tételt az ABC_{Δ} háromszögben, az AM szimediánra

$$AM^2 \cdot BC = BM \cdot AC^2 + MC \cdot AB^2 - BM \cdot MC \cdot BC$$

$$AM^2 \cdot a = \frac{ac^2}{b^2+c^2} \cdot b^2 + \frac{ab^2}{b^2+c^2} \cdot c^2 - \frac{ac^2}{b^2+c^2} \cdot \frac{ab^2}{b^2+c^2} \cdot a \qquad / : a$$

$$AM^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} - \frac{a^2b^2c^2}{\left(b^2+c^2\right)^2} = \frac{b^2c^2}{\left(b^2+c^2\right)^2} \cdot \left[2\left(b^2+c^2\right) - a^2\right] =$$

$$= \frac{4b^2c^2}{\left(b^2+c^2\right)^2} \cdot \left[\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow AM = \frac{2bc}{b^2+c^2} \cdot \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \qquad (*)$$

(A háromszög másik két szimediánjának hosszát a $(*)$ permutációjával nyerjük).

Megjegyzés

Mivel $s_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$, akkor a kapott összefüggés átírható az

$AM = \frac{2bc}{b^2+c^2} \cdot s_a$ alakra.

Felhasználva a jól ismert $\frac{2bc}{b^2+c^2} \leq 1$ egyenlőtlenséget, azonnal következik az $AM \leq s_a$ egyenlőtlenség is, vagyis hogy a háromszög súlyvonala mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a neki megfelelő szimedián (az egyenlőség akkor áll fenn, ha $b = c$).